Varianta 075

Subiectul I

a) $AB=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}$

b) $\cos^2 121+\sin^2 121=1$

c) Aria este $\frac{10\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) z=-7+8i $\Rightarrow \bar{z}=-7-8i$

e) Obțin sistemul $\begin{cases}-3+4a+b=0\\4-3a+b=0\end{cases}$ cu soluția $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

f) Aplicând teorema lui Pitagora: $BC=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix}-3 & -3\\-1 & 1\end{vmatrix}=-3-3=-6$

b) Probabilitatea este $\frac{2}{5}$

c) $5^x-1=0 \Leftrightarrow 5^x=5^0 \Leftrightarrow x=0$

d) $\log_9 x=-2 \Rightarrow x=\frac{1}{81}$

e) $E=C_8^1-C_8^1+1=1$

2.

a) $f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\ (\forall)x>0$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{-2}{2^2}=-\frac{1}{2}$

c) $f'(x)<0\ \ (\forall)x>0\ \ (din\ \ a))\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$

d) $\int_1^2 f'(x)dx=f(2)-f(1)=2+\frac{1}{5}-2-\frac{1}{2}=\frac{-3}{10}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2 f(n)}{n^2+2007}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}{n^2+2007}=1$

Subiectul III

a) $x^2+x-3=0$ $\Delta_x=1+12=13$ $x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

b) Calcul direct;

c) $\mathrm{x}_1 + x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}-1+\sqrt{13}}{2} = -1$; $x_1 x_2 = \dfrac{\left(-1-\sqrt{13}\right)\left(-1+\sqrt{13}\right)}{4} = \dfrac{1-13}{4} = -3$

d) $f(x)\cdot f(x+1) = \left(x^2+x-3\right)\left(x^2+2x+1+x+1-3\right) = \left(x^2+x-3\right)\left(x^2+3x-1\right) = x^4+4x^3-x^2-10x+3$

$f\left(x^2+2x-3\right) = \left(x^2+2x-3\right)^2 + x^2+2x-3-3 = x^4+4x^2+9+4x^3-6x^2-12x+x^2+2x-6 =$

$= x^4+4x^3-x^2-10x+3$ şi se vede egalitatea

e) $f(-1-x) = (-1-x)^2 - 1 - x - 3 = x^2+2x+1-1-x-3 = x^2+x-3 = f(x)$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$

f) $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+2x-3)^2 + x^2 - 2x - 3 - 3 = 0$ şi notând $x^2+2x-3 = y$ obțin $y^2+y-3 = 0$ cu $y_1 = x_1$ şi $y_2 = x_2$ obțin $x^2+2x-3 = x_1 \Leftrightarrow x^2+2x-3-x_1 = 0$ cu $\Delta_x = 4+4(1+x_1) = 4(2+x_1) = 6-2\sqrt{13} < 0 \Rightarrow x_1', x_2' \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ şi am

$x_1' = \dfrac{-2-i\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2}$ $x_2' = \dfrac{-2+i\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2}$ analog se procedează pentru $x^2+2x-3 = x_2$.

g) Fie α rădăcină oarecare a lui g $\Rightarrow \alpha^2+\alpha-3=0$. Am $g(\alpha) = (\alpha^2+\alpha-3+\alpha)^2+\alpha^2+\alpha-3+\alpha-3 =$ $= \alpha^2+\alpha-3 = 0$ şi cum f nu are rădăcini multiple rezultă că g e divizibil cu f adică restul cerut este zero.

Subiecrul IV

a) $f'(x) = 3e^{3x}\ln 3$

b) $f'(x) > 0$ $(\forall)x \in R \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ asimptotă orizontală către $-\infty$

d) $f'(x) > 2$ $(\forall)x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 2+e^{3x} > 2$ $\forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e^{3x} > 0$ $(\forall) \in \mathbf{R}$

e) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \left(2x+\frac{3^{3x}}{3\ln 3}\right)\Bigg|_0^1 = 2+\frac{9}{\ln 3}-\frac{1}{3\ln 3}$

f) $f(x)+f(x+1) = 32 \Leftrightarrow 2+3^{3x}+2+3^{3x+3} = 32 \Leftrightarrow 3^{3x}+27\cdot 3^{3x} = 28 \Leftrightarrow 3^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^0 \Leftrightarrow x=0$;

g) Fie $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x) = 2+3\cdot 3^{3x}$ şi $h(x) = 2\cdot 3^{3x}$. Evident g,h sunt crescătoare şi $f(x) = g(x) - h(x)$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$.